Stressen von Korrelationen – Ein konsistentes, modellbasiertes Verfahren

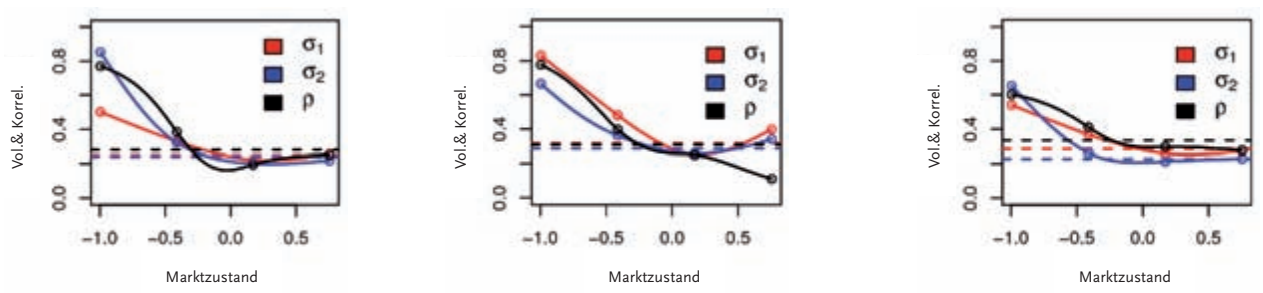
Dr. Christoph Becker | Prof. Dr. Wolfgang M. Schmidt

In den letzten Jahren verstärkten sich die Abhängigkeiten zwischen unterschiedlichen Finanzaktiva deutlich. Ganze Märkte verhalten sich zunehmend wie eine Einheit. In den Worten der Financial Times „schießen die Kurse entweder gemeinsam nach oben oder fallen gemeinsam wie ein Stein". Aus diesem Grund funktioniert die Diversifikation von Risiken schlechter als erwartet. Ferner steigt das Risiko einer Finanzkrise. Für die Bankenregulierung ist daher die Berücksichtigung der gestiegenen Abhängigkeiten zwischen einzelnen Finanzinstrumenten von grundlegender Bedeutung. Nach einem Vorschlag des Baseler Ausschusses für Bankenregulierung (BCBS) sollen Banken den Value-at-Risk in Stresssituationen (sprich: in Situationen erhöhter Abhängigkeit) berechnen [vgl. BCBS 2009b; BCBS 2011b]. Allerdings räumt der Ausschuss auch ein, dass sich Banken, die dieser Anforderung gerecht werden wollen, schwierigen fachlichen Herausforderungen gegenüber sehen [vgl. BCBS 2011a]. Im Folgenden wird ein neuer Ansatz zur Bestimmung von Stressszenarien für Abhängigkeiten zwischen Finanzaktiva entwickelt. Die Szenarien basieren auf historischen Werten und spiegeln zuvor festgelegte Stresslevel wider. Zudem erfüllen sie die von Seiten des BCBS vorgegebenen Anforderungen [vgl. BCBS 2009b; BCBS 2011b]. Im Rahmen des Modells werden Korrelationen unter normalen Marktbedingungen und in Stresssituationen verglichen und die Auswirkungen auf den Value-at-Risk untersucht. Die Ergebnisse bestätigen die Schätzungen des Baseler Ausschusses.

Für die Untersuchung wird ein neues Modell für Vermögenswerte vorgeschlagen, bei dem Abhängigkeiten (die anhand der Korrelationen zwischen unterschiedlichen Aktiva gemessen werden), durch einen gemeinsamen Marktfaktor bestimmt werden, welcher den Zustand des Marktes beschreibt. Die Verwendung eines gemeinsamen Marktzustands ist der Schlüssel zum konsistenten und intuitiven Stressing von Korrelationen und Volatilitäten. In dem Modell hängen der Vektor der Volatilitäten σ und die Korrelationsmatrix ρ von ein und demselben Marktzustand F ab. Der Marktzustand ist generisch – um im Einklang mit den Vorschlägen des Baseler Ausschusses zu bleiben, wird er als tatsächliche Veränderung eines Marktindexes in einem rollierenden Zeitfenster definiert.

Der Marktfaktor erfasst die marktweiten Bewegungen der Aktienkurse. Die Abhängigkeitsstruktur zwischen Volatilitäten σ (F) und Korrelationen ρ (F) zum Marktzustand F wird anhand täglicher Aktienkurse geschätzt. Abb. 01 zeigt die Berechnungen für ausgewählte Aktienpaare. Negative Werte für den Marktzustand deuten auf Marktrückgänge

Abb. 01: Typische Abhängigkeitsstrukturen zwischen Korrelation ρ und Volatilitäten σ_1 und σ_2 zum Marktzustand



(a) Colgate – Exxon (b) Walt Disney – Pfilzer (c) Walmart – Johnson & Johnson

Daten von 1990 bis 2010; realisierte Trend des S&P-500-Index über ein rollendes Zeitfenster der vergangenen 75 Handelstage, wobei die realisierte Verschiebung auf Jahresbasis umgerechnet wird.

hin, ein Marktzustand bei 0 oder geringfügig positiven Werten deutet auf einen normalen Markt hin, stark positive Marktzustände deuten auf eine Hausse hin. In Abb. 01 sind steigende Korrelationen in einer Baisse (sprich einem Marktzustand F ≤ - 0,5) und stabile Korrelationen in einem normalen Marktzustand und der Hausse (F > - 0,5) zu beobachten.

Die horizontalen Linien in Abb. 01 sind konstante Korrelationen und Volatilitäten, die anhand eines entsprechenden Modells mit konstanten Korrelationen und Volatilitäten geschätzt wurden. Der Unterschied zwischen marktzustandsabhängigen Volatilitäten und Korrelationen sowie ihrem konstanten Gegenstück zeigt jeweils, wie stark sich die jeweiligen Größen in einer Krise verändern und können als Maß für Ansteckungseffekte interpretiert werden. Der Marktzustand wird als Trend über eine feste Anzahl an täglichen Beobachtungen der Vergangenheit berechnet. Diese Größe kann als „Marktgedächtnis" interpretiert werden. Schätzungen für verschiedene Assets zeigen, dass die optimale Länge bei 75 Handelstagen liegt.

Das Stressing von Portfoliokorrelationen kann nicht bivariat erfolgen, da dies die Positiv-Semi-Definitheit der Korrelationsmatrix zerstören könnte. Daher wird für ein Portfolio aus n Aktien gleichzeitig der Vektor der Volatilitäten σ (F) und die n x n-Korrelationsmatrix ρ (F) berechnet. Demzufolge sind der Vektor der Volatilitäten und die Korrelationsmatrix bekannte Funktionen σ (F) und ρ (F) des Marktzustandes F. 23. Damit die Risikoszenarien den Anforderungen des BCBS [vgl. BCBS 2009b] genügen, wird der Marktzustand auf vorher festgelegte Stresslevel gesetzt, die auf der Zeitreihe vergangener Beobachtungen des Marktzustands F basieren. Genauer gesagt wird der Marktzustand F auf einen Wert f_α mit beispielsweise $\alpha \in \{0{,}1\%, 1\%, 5\%\}$ derart verschoben, dass ein Prozentsatz α in der Vergangenheit beobachteter Marktzustände unter f_α liegt. Anschließend werden die entsprechende Matrix von gestressten (stressed) Korrelationen gemäß der Formel

(1) $$\rho\,(f_\alpha) = (p_{i,j}(f_\alpha))_{i,j=1,\dots,n}$$

und die Vektoren von gestressten (stressed) Volatilitäten gemäß der Formel

(2) $$\sigma\,(f_\alpha) = (\sigma_1(f_\alpha),\dots,\sigma_n\,(f_\alpha)).$$

berechnet. Da der Marktzustand als realisierten Trend eines geeigneten Indexes definiert wird, erfasst dies das systemische Marktrisiko eines Aktienportfolios. Die vorgeschlagenen Stressszenarien für Volatilitäten und Korrelationen erfüllen die von Seiten des BCBS [vgl. BCBS 2011b] aufgestellten Mindestanforderungen. Insbesondere bezieht sich die Wahl des Stresswertes α auf den Schweregrad des Stressszenarios. Außerdem werden Volatilitäten und Korrelationen konsistent gestresst, da sie gleichzeitig belastet werden und auf demselben Marktfaktor F basieren.

VaR-Analyse unter Stressbedingungen

Zur Illustration der obigen Gedanken wird im Folgenden der Value-at-Risk eines Portfolios in Stresssituationen analysiert. Hierbei wird angenommen, dass ein Betrag V0 in ein Musterportfolio investiert wird. Für die gegebene Gewichtung der Vermögenswerte γ_i errechnet sich ein zehntägiger „gestresster VaR" für einen Stresswert α anhand der Formel

(3)
$$\mathrm{VaR}_\alpha^{\text{stressed}} = -V_0\left(\exp\left(\sqrt{\frac{10}{250}}\,\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}\gamma_i\gamma_j\sigma_i(f_\alpha)\sigma_j(f_\alpha)\rho_{i,j}(f_\alpha)}\right)-1\right),$$

wobei Volatilitäten und Korrelationen zum Stresswert eines in der Vergangenheit beobachteten Marktzustandes F berechnet werden. Die Funktion Φ ist die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Außerdem wird ein nicht-gestresster VaR für einen Stresswert α gemäß folgender Formel berechnet:

(4)
$$\mathrm{VaR}_\alpha^{\text{non-stressed}} = -V_0\left(\exp\left(\sqrt{\frac{10}{250}}\,\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}\gamma_i\gamma_j\sigma_i^{\text{const}}\sigma_j^{\text{const}}\rho_{i,j}^{\text{const}}}\right)-1\right)$$

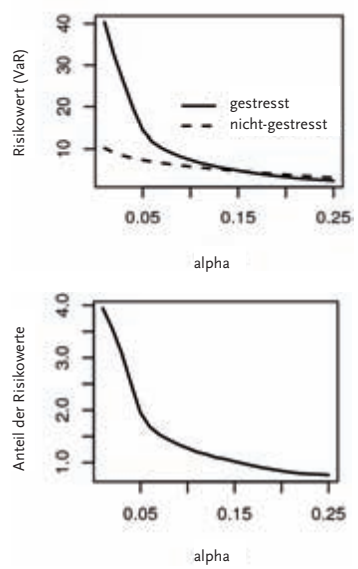
Hier werden konstante Volatilitäten und Korrelationen verwendet, die mittels eines entsprechenden Modells mit konstanten Volatilitäten und Korrelationen geschätzt werden. Der linke Teil der Abb. 02 zeigt die Funktionen:

(5) $$\alpha \mapsto \mathrm{VaR}_\alpha^{\text{stressed}}, \qquad \alpha \mapsto \mathrm{VaR}_\alpha^{\text{non-stressed}}, \qquad \alpha \in (0, 0.25),$$

geschätzt für ein Beispielportfolio von 20 Aktien, in dem die Vermögenswerte γ_i mit gleicher Gewichtung enthalten sind. Der rechte Teil der Abb. 02 zeigt das Verhältnis zwischen gestresstem und nicht-gestresstem VaR, d.h.:

(6) $$\alpha \mapsto \frac{\mathrm{VaR}_\alpha^{\text{stressed}}}{\mathrm{VaR}_\alpha^{\text{non-stressed}}}, \qquad \alpha \in (0, 0.25).$$

Abb. 02: Berechneter VaR für zehn Tage und unterschiedliche Stresswerte α



(a) Risikowert (VaR)

(b) Verhältnis zwischen gestressten und nicht-gestressten Value-at-Risk

Daten von Jan. 2004 bis Nov. 2010; Grundlage ist ein Portfolio von 20 Aktien und einem Portfoliowert von 100 Dollar.

Der gestresste VaR zum Level alpha = 1%, $\mathrm{VaR}_{0.01}^{\mathrm{stressed}}$ der mittels marktzustandsabhängiger Volatilitäten und Korrelationen geschätzt wurde, ist viermal so hoch wie der entsprechende ungestresste VaR $\mathrm{VaR}_{0.01}^{\mathrm{non\text{-}stressed}}$. Die Ergebnisse für den gestressten VaR zum Stresslevel 1% bestätigen die Ergebnisse des BCBS [vgl. BCBS 2009a], dass sich das Verhältnis zwischen gestresstem VaR und nicht-gestresstem VaR bei Banken bei einem Median von 2,6 zwischen 0,69 und 7 bewegt.

Fazit

Wir fassen die Vorteile des beschriebenen modellbasierten Verfahrens zusammen. Erstens erfüllt es – durch die Festlegung von Stressszenarien für Volatilitäten und Korrelationen auf der Grundlage der Formeln (1) und (2) – die von Seiten des BCBS dargestellten minimalen Anforderungen. Es existiert also der geforderte „Risikofaktor [...], der dafür geeignet ist, marktweite Bewegungen der Aktienkurse zu erfassen (z. B. einen Marktindex)“ [vgl. BCBS 2011b]. Außerdem werden Volatilitäten und Korrelationen konsistent gestresst, da sie gleichzeitig belastet werden und auf demselben Markfaktor F basieren. Zweitens bestätigt der Ansatz die Ergebnisse der Studie [vgl. BCBS 2009a] bezüglich der Frage, wie stark ein gestresster VaR einen normalen VaR übersteigt. Drittens können die Korrelationen (1) und Volatilitäten (2) in jedem Modell zur Marktrisikoanalyse verwendet werden, in dem tägliche Renditen als normalverteilt angenommen werden.

Becker und Schmidt [vgl. Becker/Schmidt 2011] stellen zudem fest, dass das Modell gängigen Ansätzen wie dem Dynamic-Conditional Correlation-GARCH-Modell von Engle [2002] bei der Erfassung der Dynamik von Korrelationen und Volatilitäten innerhalb gegebener Zeitreihen überlegen sein kann. In der weiteren Forschung werden alternative Einflussfaktoren auf Korrelationen untersucht sowie die Fähigkeit des Modells, systemische Risiken zu messen.

Literatur

Basel Committee on Banking Supervision/BCBS (Hrsg.) [2009a]. Analysis of the trading book quantitative impact study. Technical report, Bank for International Settlements, October 2009.

Basel Committee on Banking Supervision/BCBS (Hrsg.) [2009b]: Revisions to the Basel II market risk framework.Technical report, Bank for International Settlements, 2009.

Basel Committee on Banking Supervision/BCBS (Hrsg.) [2011a]: Messages from the academic literature on risk measurement for the trading book. Technical report, Bank for International Settlements, 2011.

Basel Committee on Banking Supervision/BCBS (Hrsg.) [2011b]: Revisions to the Basel II market risk framework. Technical report, Bank for International Settlements, February 2011.

Becker, C./Schmidt, W: Stressed correlations and volatilities – How to fulfill requirements of the Basel Committee, Frankfurt am Main 2011, elektronisch veröffentlicht unter: ssrn.com/abstract=1781931.

Engle, R: Dynamic conditional correlation: a simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. in: Journals of Business & Economic Statistics, Vol. 20(2002), H. 3, S. 339-350.

Autoren

Dr. Christoph Becker, Lecturer, Centre for Practical Quantitative Finance, Frankfurt School of Finance & Management, Frankfurt am Main

Prof. Dr. Wolfgang M. Schmidt, Professor für Quantitative Methoden, Centre for Practical Quantitative Finance, Frankfurt School of Finance & Management, Frankfurt am Main